

$$(1 \pm i)^n$$

Dans ce chapitre, nous allons introduire deux formules permettant de calculer rapidement de grandes puissances de $(1 + i)^n$ et $(1 - i)^n$, sans utiliser la particularité du nombre $i^\ddagger$. Pour cela, il sera nécessaire d'introduire une nouvelle suite particulière, nommée **suite complexe de Topsxi**.

1 Rappel sur la fonction partie entière

Définition:

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \leq x < n + 1$.

On appelle **fonction partie entière inférieure** la fonction $E(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{N}$ définie par $E(x) = n$. Cette fonction, généralement notée $\lfloor x \rfloor$, est appelée tout simplement **fonction partie entière** ou floor function en anglais.

La fonction partie entière renvoie la partie entière d'un nombre réel. Par exemple :

- $\lfloor 2.58 \rfloor = 2$
- $\lfloor 1 \rfloor = 1$
- $\lfloor -4.58 \rfloor = -5$ car $-5 \leq -4.58 < -4$

Cette fonction joue un rôle important dans les deux formules à venir ainsi que dans la définition de la suite complexe de Topsxi.

2 La suite complexe de Topsxi

Les deux formules reposent sur le concept d'une nouvelle suite particulière. Cette suite nommée **suite complexe de Topsxi** et notée (s_n) a pour vocation de retranscrire la périodicité du nombre i .

Définition 1 :

La suite complexe de Topsxi est définie par récurrence de la manière suivante :

$$\begin{cases} s_0 = 1 - i \\ s_{n+1} = s_n + i^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1} \end{cases}$$

En pratique, pour calculer des termes de la suite s_n , on utilise la propriété suivante plutôt que la définition par récurrence.

Propriété de périodicité :

La suite complexe de Topsxi ne peut prendre qu'un nombre limité de valeurs. En particulier, la suite complexe de Topsxi boucle de la manière suivante :

- $s_0 = 1 - i$
- $s_1 = 1$
- $s_2 = 1 + i$

$\ddagger$ À savoir $i^2 = -1$ et $i^4 = 1$

- $s_3 = i$
- $s_4 = -1 + i$
- $s_5 = -1$
- $s_6 = -1 - i$
- $s_7 = -i$
- $s_8 = 1 - i = s_0$
- ...

La suite s_n est donc de période 8.

La démonstration se fait par calcul des premiers termes et en remarquant que la définition de la suite par récurrence ne permet pas de changer la structure de la suite à un n donné.

En utilisant cette propriété, il est très facile de calculer des termes avec un n élevé. Par exemple :

- $18 \equiv 2 \pmod{8}$ donc $s_{18} = s_2 = 1 + i$
- $2500 \equiv 4 \pmod{8}$ donc $s_{2500} = s_4 = -1 + i$

La suite complexe de Topsisxi présente également des propriétés intéressantes. Ces propriétés seront utiles pour la démonstration des formules de $(1 \pm i)^n$.

Propriétés du terme suivant

Soit $n \in \mathbb{R}$

Si n est impair, alors $(1 + i)s_n = s_2 s_n = s_{n+1}$.

Si n est pair, alors $(1 + i)s_n = s_2 s_n = 2s_{n+1}$.

La démonstration se fait par exhaustivité des cas sur $\llbracket 0, 7 \rrbracket$. La propriété de périodicité permet de généraliser les propriétés du terme suivant à tout n .

Propriété du saut

Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors $s_n = -is_{n+2}$.

La démonstration se fait par exhaustivité des cas sur $\llbracket 0, 7 \rrbracket$ ($n+2 = 9$ quand $n = 7$ mais $s_9 = s_1$). La propriété de périodicité permet de généraliser la propriété du saut à tout n .

3 Les formules de calcul

Après avoir construit la suite complexe de Topsisxi, nous pouvons désormais présenter les formules de calcul pour $(1 \pm i)^n$.

Commençons par $(1 + i)^n$.

3.1 Formule pour $(1 + i)^n$

Théorème 1 : $\forall n \in \mathbb{N}, (1 + i)^n = 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \times s_{n+1}$

où s_{n+1} est le $n + 1$ -ième terme de la suite complexe de Topsisxi.

Démonstration par récurrence.

La formule est valide pour le terme $n = 0$. En effet, $(1 + i)^0 = 1$ par convention de $x^0 = 1$. Au passage, $(1 + i) \neq 0$ donc pas de forme indéterminée : la convention s'applique bien. De plus, $2^{\lfloor \frac{0}{2} \rfloor} \times s_{0+1} = 2^0 \times s_1 = s_1 = 1$. On a bien l'égalité.

Passons à l'hérédité : Soit un $n \in \mathbb{N}$ tel que la formule est vérifiée. Alors, on a :

$$(1 + i)^{n+1} = (1 + i)(1 + i)^n = s_2 \times (2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \times s_{n+1})$$

en utilisant l'hypothèse de récurrence et en remarquant que $s_2 = 1 + i$.

Interviens alors la propriété du terme suivant :

- Si n est pair donc $n + 1$ est impair, alors

$$s_2 s_{n+1} = s_{(n+1)+1} = s_{n+2} \text{ donc } s_2 \times 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \times s_{n+1} = 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \times s_{n+2}$$

d'après la propriété du terme suivant appliqué à $n + 1$ impair.

Or, comme n est pair, alors $\exists k \in \mathbb{N}, n = 2k$ et $n + 1 = 2k + 1$. Par conséquent,

$$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor = k \text{ et } \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor = k \text{ d'où } \lfloor \frac{n}{2} \rfloor = \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$$

En injectant ce résultat dans la formule précédente, on a :

$$2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \times s_{n+2} = 2^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \times s_{n+2}$$

Ainsi, on a $(1 + i)^{n+1} = 2^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \times s_{n+2}$, ce qui prouve l'hérédité pour les termes pairs.

- Si n est impair donc $n + 1$ est pair, alors

$$s_2 s_{n+1} = 2 s_{(n+1)+1} = 2 s_{n+2} \text{ donc } s_2 \times 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \times s_{n+1} = 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1} \times s_{n+2}$$

d'après la propriété du terme suivant appliqué à $n + 1$ pair.

Or, comme n est impair, alors $\exists k \in \mathbb{N}, n = 2k + 1$ et $n + 1 = 2k + 1 + 1 = 2(k + 1)$. Par conséquent,

$$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor = k \text{ et } \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor = k + 1 \text{ d'où } \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 = \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$$

En injectant ce résultat dans la formule précédente, on a :

$$2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1} \times s_{n+2} = 2^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \times s_{n+2}$$

Ainsi, on a $(1 + i)^{n+1} = 2^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \times s_{n+2}$, ce qui prouve l'hérédité pour les termes impairs.

On a prouvé l'hérédité pour tout n donc la formule est valable pour tout $n \in \mathbb{N}$. ■

3.2 Formule pour $(1 - i)^n$

Pour concevoir la formule de calcul de $(1 - i)^n$, on peut se servir de la relation liant $(1 + i)$ et $(1 - i)$. En effet,

$$\frac{(1 - i)^n}{(1 + i)^n} = \left(\frac{1 - i}{1 + i} \right)^n = \left(\frac{s_0}{s_2} \right)^n = (-i)^n \text{ donc } (1 - i)^n = (-i)^n (1 + i)^n$$

d'après la propriété du saut appliqué au terme s_0 .

La formule découle directement de ce constat.

Théorème 2: $\forall n \in \mathbb{N}, (1 - i)^n = (-i)^n \times 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \times s_{n+1}$

où s_{n+1} est le $n + 1$ -ième terme de la suite complexe de Topsy.

On peut démontrer cette formule de deux manières, soit en faisant une récurrence comme avec la première formule, soit en se basant sur la propriété du saut.

Démonstration avec la propriété du saut.

On a précédemment conclu que $(1-i)^n = (-i)^n(1+i)^n$. Comme $(1+i)^n = 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \times s_{n+1}$ (cette formule a été démontrée), alors naturellement $(1-i)^n = (-i)^n \times 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \times s_{n+1}$. ■

Démonstration par récurrence.

La formule est valide pour le terme $n = 0$. En effet, $(1-i)^0 = 1$ par convention de $x^0 = 1$. Au passage, $(1-i) \neq 0$ donc pas de forme indéterminée : la convention s'applique bien. De plus, $(-i)^0 \times 2^{\lfloor \frac{0}{2} \rfloor} \times s_{0+1} = (-2i)^0 \times s_1 = s_1 = 1$. On a bien l'égalité.

Passons à l'hérédité : Soit un $n \in \mathbb{N}$ tel que la formule est vérifiée. Alors, on a :

$$(1-i)^{n+1} = (1-i)(1-i)^n = (-i)(1+i)(1-i)^n = (-i)s_2 \times ((-i)^n \times 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \times s_{n+1}) = s_2 \times (-i)^{n+1} \times 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \times s_{n+1}$$

en utilisant l'hypothèse de récurrence et en remarquant que $s_2 = 1+i$.

Interviens alors la propriété du terme suivant :

- Si n est pair donc $n+1$ est impair, alors

$$s_2 s_{n+1} = s_{(n+1)+1} = s_{n+2} \text{ donc } (-i)^{n+1} \times s_2 \times 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \times s_{n+1} = (-i)^{n+1} \times 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \times s_{n+2}$$

d'après la propriété du terme suivant appliqué à $n+1$ impair.

Or, comme n est pair, alors $\exists k \in \mathbb{N}, n = 2k$ et $n+1 = 2k+1$. Par conséquent,

$$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor = k \text{ et } \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor = k \text{ d'où } \lfloor \frac{n}{2} \rfloor = \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$$

En injectant ce résultat dans la formule précédente, on a :

$$(-i)^{n+1} \times 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \times s_{n+2} = (-i)^{n+1} \times 2^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \times s_{n+2}$$

Ainsi, on a $(1-i)^{n+1} = (-i)^{n+1} \times 2^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \times s_{n+2}$, ce qui prouve l'hérédité pour les termes pairs.

- Si n est impair donc $n+1$ est pair, alors

$$s_2 s_{n+1} = 2s_{(n+1)+1} = 2s_{n+2} \text{ donc } (-i)^{n+1} \times s_2 \times 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \times s_{n+1} = (-i)^{n+1} \times 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1} \times s_{n+2}$$

d'après la propriété du terme suivant appliqué à $n+1$ pair.

Or, comme n est impair, alors $\exists k \in \mathbb{N}, n = 2k+1$ et $n+1 = 2k+1+1 = 2(k+1)$. Par conséquent,

$$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor = k \text{ et } \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor = k+1 \text{ d'où } \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 = \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$$

En injectant ce résultat dans la formule précédente, on a :

$$(-i)^{n+1} \times 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1} \times s_{n+2} = (-i)^{n+1} \times 2^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \times s_{n+2}$$

Ainsi, on a $(1-i)^{n+1} = (-i)^{n+1} \times 2^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \times s_{n+2}$, ce qui prouve l'hérédité pour les termes impairs.

On a prouvé l'hérédité pour tout n donc la formule est valable pour tout $n \in \mathbb{N}$. ■