

Espace coloré de Topsxi

Petite introduction au cours

Le monde naturel nous permet de nous affranchir de plusieurs contraintes incroyables, en échange toutefois de difficultés nouvelles. Cela dit, il reste un outil intéressant dès lors que l'on s'intéresse à des espaces colorimétriques, puisque la notion informatique de couleur est avant tout liée à des composantes entières.

Partie 2 : Introduction à l'espace coloré de Topsxi

III Chapitre III : L'espace coloré de Topsxi

III.I Construction progressive

Nous allons construire progressivement l'espace coloré de Topsxi.

III.IA L'espace naturel pur à 255

Considérons un espace naturel **pur** contenant tous les points qui ont des coordonnées **toutes inférieures ou égales à 255**. Nous allons noter G cet espace.

Autrement dit, $G = \{(x, y, z), 0 \leq x, y, z \leq 255\}$. Dans le monde naturel, G est un espace continu car tous les points ont des coordonnées qui se succèdent, coordonnée par coordonnée (soit $(0, 0, 0)$, $(0, 0, 1)$, $(0, 0, 2)$, etc).

Si on souhaite représenter G dans le monde naturel, nous nous apercevons que G est en réalité un **cube bien compact** de côté de longueur 255 (en utilisant la distance hamiltonienne). Nous remarquerons que l'origine du repère $(0, 0, 0)$ est un **sommet** du cube G .

Par ailleurs, G vérifie la propriété suivante : $\text{card}(G) = 256^3 = 16777216$.

III.IB Couleurs

Nous allons **assigner à chaque point de l'espace G une couleur c** . Cette couleur est unique et est déterminée de la manière suivante :

Le point $A(x_A, y_A, z_A)$ reçoit la couleur $c = (x_A, y_A, z_A)$

Les couleurs c sont construites selon le **modèle RGB**. Ainsi, l'abscondant donne la valeur de la composante rouge, l'ordant celle de la composante verte et la cotinette celle de la composante bleue.

Les coordonnées du point deviennent donc les composantes de la couleur associée.

Par exemple, l'origine du repère $(0, 0, 0)$ est associée à la couleur noire $RGB = (0, 0, 0)$.

Remarque : Par abus de langage, nous confondrons "point" et "couleur". Nous dirons donc que "le noir est l'origine du repère" ou "le point noir est l'origine du repère".

En assignant ainsi des couleurs aux points de G , les axes du repère **obtiennent une couleur** : l'axe des abscondants devient l'axe des points rouges, c'est-à-dire l'axe contenant tous les points de G ayant leurs composantes non rouge nulles (= ayant un ordant et une cotinette nulle).

De même, l'axe des ordants devient l'axe des points verts, et l'axe des cotinettes devient l'axe des points bleus.

Par abus de langage, nous parlerons d'**axe rouge**, d'**axe vert** et d'**axe bleu**.

En gros : $x = R, y = G, z = B$.

Remarque : le fait d'assigner les axes (Ox) , (Oy) et (Oz) respectivement aux couleurs rouge, verte et bleue n'est pas nouvelle. Des logiciels comme Blender ou GeoGebra utilisent déjà cette association dans l'affichage 3D du repère.

III. IC L'espace coloré de Topsxi

Nous avons construit G et associé ses points à des couleurs. Cette combinaison ainsi obtenue est nommée **espace coloré de Topsxi**.

Définition: L'espace coloré de Topsxi noté $\mathcal{E}_T$ est l'unique espace naturel pur contenant tous les points de coordonnées toutes inférieures ou égales à 255 ET tel que tous les points sont associés à une unique couleur établie sur le modèle RGB à partir de leurs coordonnées.

Voici donc le fameux espace coloré de Topsxi.

À noter que l'espace coloré de Topsxi est donc un **cube bien compact** lorsqu'on le représente dans le monde naturel.

D'ailleurs, si on représente chaque point avec sa couleur associée, on obtient un cube bien coloré.

Pour les fins connaisseurs, l'espace coloré de Topsxi n'est autre qu'un nom alternatif donné à l'espace colorimétrique RGB (CIE RGB de 1931). Une longue histoire de pourquoi ce nom qui ne sera pas présenté ici.

J'ai réussi à choper une représentation 3D de l'espace coloré de Topsxi sur [ResearchGate](#).

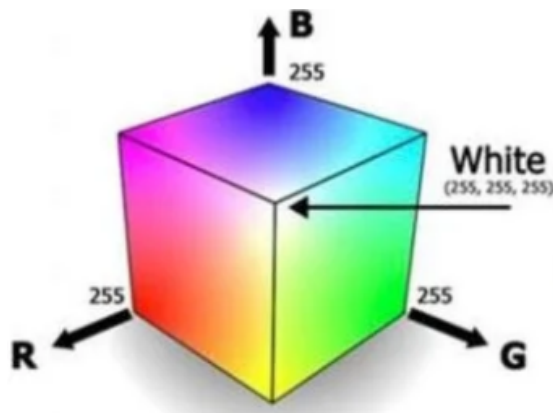


Figure 1: L'espace coloré de Topsxi (ou espace colorimétrique RGB)

III. II Concepts géométriques de l'espace coloré de Topsxi

III. IIA Points lumineux

Définition: On appelle **point lumineux** un point appartenant à l'espace coloré de Topsxi.

Cette définition existe pour rappeler que le point est associé à une couleur.

III. IIB Tox

Dans la première partie, nous avons "établi" que certaines transformations géométriques (= opérations) peuvent suffire à générer tout un espace naturel. Ces opérations sont qualifiées de **fondamentales**.

Nous avons également vu deux conjectures à ce sujet, regroupées sous le nom de "conjecture de Symens – Rotule".

Le concept d'opérations fondamentales jouent un rôle plus ou moins majeur dans l'espace coloré de Topsis. Ces opérations fondamentales portent le nom de **tox (pl. tox)**.

Un tox est donc une opération pouvant générer à elle seule tout l'espace coloré de Topsis.

Du point de vue conjectural, l'espace coloré de Topsis se base sur la **conjecture de Rotule**. Ainsi, l'espace coloré de Topsis posséderait un tox, à **savoir la rotation directe** *Rot*.

Dans la théorie, les opérations de **symétrie centrale** *Sym*, de **projection orthogonale** *Proj* et d'**identité partielle** *Id_a* peuvent générer tout $\mathfrak{E}_T$, mais à **condition d'avoir plusieurs points**. En raison de leur importance dans l'espace coloré de Topsis, ces opérations ont un niveau proche de celui de la rotation directe : elles seront appelées **subtox** (par opposition à la rotation directe que nous appellerons **protox**).

Fig. Résumé des tox

rotation directe	symétrie centrale	identité partielle	projection orthogonale
<i>Rot(A, θ)</i>	<i>Sym(A)</i>	<i>Id_a(A)</i> (ex: <i>Id_x(A)</i>)	<i>Proj(A, (d))</i>
protox	subtox	subtox	subtox

III. IIC Déplacements et distance

Imaginons que nous nous situons sur un point de l'espace coloré de Topsis. Nous pouvons alors nous déplacer de plusieurs unités selon les différents axes.

Définition: On appelle **déplacement élémentaire** le déplacement d'une unité selon un seul axe.

On définit **six** déplacements élémentaires :

$$+R, -R, +G, -G, +B, -B$$

Par exemple, $+R$ signifie "avancer d'une unité selon la direction de l'axe rouge" (+1 sur la composante rouge).

Les déplacements élémentaires permettent de définir la notion de **distance** dans l'espace coloré de Topsis.

Définition: La distance entre deux points colorés A et B :

$$\forall A, B \in \mathfrak{E}_T, d(A, B) = |R_A - R_B| + |G_A - G_B| + |B_A - B_B|$$

où R_A désigne la composante rouge du point A (idem pour les autres)

Remarque : la définition de la distance utilisée pour l'espace coloré de Topsis est celle de la distance hamiltonienne.

=> : Théorème de la couleur minimale

Soit A une couleur de $\mathfrak{E}_T$.

Alors la distance minimale entre A et une couleur B de l'espace coloré de Topsis est donnée par la formule précédente.

: Formulation alternative

La distance minimale entre deux couleurs A et B de $\mathfrak{E}_T$ correspond au nombre minimal de déplacements élémentaires reliant les deux points colorés.

Démonstration hamiltonienne.

III.112 Vecteurs de coloration

Définition: On appelle **vecteur de coloration** toute transformation bijective **fixe** indiquant un déplacement au sein de l'espace coloré de Topsxi.

On note et représente les vecteurs de coloration comme les vecteurs classiques.

Bien noter que :

- Contrairement aux vecteurs classiques, les vecteurs de coloration sont associées à **une origine et une image**. Ils ne sont donc pas déplaçables.
- On peut définir un vecteur de coloration de trois manières différentes :
 - avec un point d'application et un point image (= couleur d'arrivée)
 - avec un point d'application, une norme, une direction et un sens
 - avec un point d'application et des coordonnées vectorielles

Un vecteur de coloration **traduit la transformation que l'on applique à une couleur**. Par exemple, une teinture ou un filtre appliqué à la couleur turquoise est représentable par un vecteur de coloration.

Cela dit, le processus de teinture ou de filtre à proprement parler **n'est PAS représentable** par un vecteur de coloration puisque le processus n'est pas lié à une couleur particulière. Dans ce cas, nous ferons usage d'applications.

Remarque : il existe 16777216^3 **vecteurs de coloration !**

Avec la notion de déplacements, nous pouvons écrire les vecteurs de coloration de manière à mettre en évidence les déplacements élémentaires. Par exemple :

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} +3R \\ -2G \\ -B \end{pmatrix}_{(12,55,0)}$$

est un vecteur de coloration appliqué à la couleur (12, 55, 0).

Une manière plus compacte serait d'écrire : $\vec{v} = (12, 55, 0) + 3R - 2G - B$

Nous pouvons évidemment omettre les lettres comme pour les vecteurs classiques.

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}_{(12,55,0)}$$

Dans tous les cas, nous prendrons soin de **spécifier le point d'application** du vecteur de coloration.

Pour finir, la conjecture de Rotule peut être utilisée pour représenter un vecteur de coloration.

=> : Théorème de génération vectorielle (conjecture)

Tout vecteur de coloration est exprimable sous forme de tox, et en particulier de rotations directes.

=> : La démonstration est simple.

Un vecteur de coloration est une succession de déplacements élémentaires. Or, tout déplacement élémentaire est en réalité une translation d'une unité dans une direction. En admettant que la conjecture de Rotule soit vérifiée, la translation (idem pour les subtox) est exprimable uniquement avec des rotations directes (le protox). Donc la succession de déplacements élémentaires devient une succession de rotations directes.

CQFD

Cela dit, nous n'utiliserons jamais la représentation en rotations directes seules, car elle est insensément longue.

Quant à la représentation en tox seuls, elle sera utile dans certaines démonstrations (mais pas dans la vraie vie).

III. IIE Points, axes et plans particuliers

Définition: Les axes rouge, vert et bleu sont nommés **axe principaux**.

Par convention, plutôt que de noter l'axe rouge (Ox), on le notera $\vec{R}$.

De même, l'axe vert sera noté $\vec{G}$ (pour "Green") et l'axe bleu $\vec{B}$.

Notez bien l'usage des majuscules.

Les sommets de l'espace coloré de Topsxi (qui, rappelons-le, est un cube) sont :

- le noir pur, (0, 0, 0), noté K (comme pour le système $CMYK$),
- le rouge pur, (255, 0, 0), noté R ,
- le vert pur, (0, 255, 0), noté G (pour "Green"),
- le bleu pur, (0, 0, 255), noté B ,
- le jaune pur, (255, 255, 0), noté Y (pour "Yellow"),
- le cyan pur, (0, 255, 255), noté C ,
- le magenta pur, (255, 0, 255), noté M ,
- le blanc pur, (255, 255, 255), noté W (pour "White")

La notion de "pur" est liée aux règles établies par le système el Colorà de Topsxi. Dans ce thését, nous omettrons volontairement ce mot.

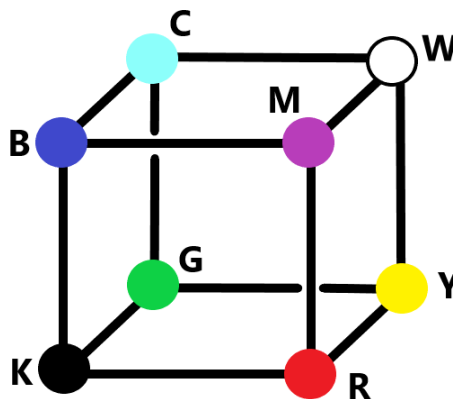


Figure 2: Les 8 sommets de l'espace coloré de Topsxi

Nous pouvons remarquer que les sommets de l'espace coloré de Topsxi sont les 3 couleurs primaires, les 3 couleurs secondaires et les 2 non-couleurs.

Définition: On appelle **plans primaires** les trois plans suivants :

- le **plan rouge** noté (R), face du cube contenant tous les points de composante rouge maximale ($R = 255$)
- le **plan vert** noté (G), face du cube contenant tous les points de composante verte maximale ($G = 255$)
- le **plan bleu** noté (B), face du cube contenant tous les points de composante bleue maximale ($B = 255$)

Attention à ne pas confondre les notations du plan (R) avec celle de l'axe ($\vec{R}$) !.

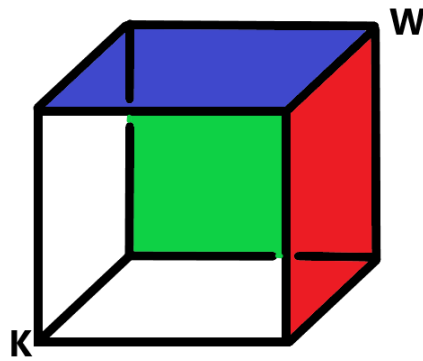


Figure 3: Les plans primaires de l'espace coloré de Topsxi

Sur le même principe :

Définition: On appelle **droites remarquables** ou **droites secondaires** les trois droites suivantes :

- la **droite du jaune** noté (y) , arête du cube contenant tous les points de composantes rouge et verte maximales ($R = G = 255$)
- la **droite du cyan** noté (c) , arête du cube contenant tous les points de composantes verte et bleue maximales ($G = B = 255$)
- la **droite du magenta** noté (m) , arête du cube contenant tous les points de composantes rouge et bleue maximales ($R = B = 255$)

Vous remarquerez l'usage des minuscules pour le nom des droites remarquables.

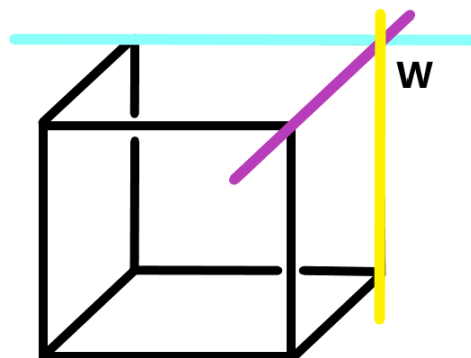


Figure 4: Les droites remarquables de l'espace coloré de Topsxi

Remarques :

- $W = (R) \cap (G) \cap (B) = (m) \cap (c) \cap (y)$
- $K = \vec{R} \cap \vec{G} \cap \vec{B}$

Définition: On appelle **droite des gris** la première diagonale du cube, c'est-à-dire la droite (KW) .

Cette droite contient uniquement tous les points colorés ayant la même valeur pour leurs trois composantes ($R = G = B$), ce qu'on appelle communément un **gris** ou une **non-couleur**.

Remarque : le blanc W et le noir K sont des gris car appartenant à la droite des gris.

III. III Base hexadécimale

Étant donné qu'une couleur au format RGB est associée à un code hexadécimal (en informatique), nous utiliserons **grandement** la base hexadécimale.

La suite de cette section a pour but de présenter rapidement cette base, puis de la mettre en application à l'espace coloré de Topsxi.

Pour rappel, la base que nous utilisons tous les jours se nomme **base décimale** (ou **base 10**).

III. IIIA Numération

Dans la base hexadécimale (aussi appelée base 16), il y a **16 chiffres** :

Fig. Les 16 chiffres hexadécimaux

Base 16	0	1	2	3	4	5	6	7	Base 16	8	9	A	B	C	D	E	F
Base 10	0	1	2	3	4	5	6	7	Base 10	8	9	10	11	12	13	14	15

Par exemple, 16 devient 10 en base 16, 120 devient 78, 255 devient FF .

Normalement, il est coutume de placer un indice 16 pour indiquer la base (ex: 22_{16} signifie 22 en base 16, soit 34 en base 10).

Cela dit, dans certains cas de l'espace coloré de Topsxi, nous ne spécifierons pas cet indice (car ces cas ne sont nullement ambigus).

III. IIIB Code couleurs

En informatique, il est coutume de faire référence aux couleurs par **un code hexadécimal**. Ce code est constitué de **six chiffres hexadécimaux** tel que :

- les deux premiers chiffres forment la valeur de la composante rouge en base 16
- les deux suivants forment celle de la composante verte en base 16
- les deux derniers forment celle de la composante bleue en base 16

Ce code est très souvent **précédé d'un hashtag #**

Par exemple, considérons la couleur (16, 120, 255). Nous avons précédemment vu que :

$$16 \rightarrow 10_{16}, 120 \rightarrow 78_{16}, 255 \rightarrow FF_{16}$$

donc

$$(16, 120, 255) \rightarrow \#1078FF$$

Dans l'espace coloré de Topsxi, nous utiliserons **grandement** cette notation du fait de sa compacité.

III. IIIC Premières équations hexadécimales

Nous allons définir quelques plans et droites introduits précédemment, avec la base 16.

Le plan bleu contient toutes les couleurs de composante bleue maximale, soit $B = 255 = FF_{16}$. La composante bleue est la 3e coordonnée (z). Donc, l'équation cartésienne du plan bleu est : $(B) : z - FF = 0$.

Un raisonnement similaire permet de définir : $(R) : x - FF = 0$ et $(G) : y - FF = 0$.

La droite du cyan peut être vue comme l'intersection des plans vert et bleu. Donc $(c) = \{(x, FF, FF), 0 \leq x \leq FF\}$. Nous pouvons aussi définir (c) avec une équation paramétrique :

$$(c) = \begin{cases} x = t \\ y = FF \\ z = FF \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq FF$$

Nous pouvons appliquer un raisonnement similaire pour les droites du magenta et du jaune.

La droite des gris peut être définie avec l'équation paramétrique suivante :

$$(KW) = \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq FF$$