

Espace coloré de Topsxi

Petite introduction au cours

Au sein de ce thését, nous allons découvrir une notion géométrique complexe resserrant les liens entre la physique, les mathématiques et l'informatique. Ce thését est de loin le plus important de toutes les mathématiques de Topsxi, non seulement en termes de profondeur (recherches élaborées, notions profondes) mais également en termes de quantité : en effet, ce thését est découpé en 9 parties + 1 partie bonus. Chaque partie est elle-même constituée de plusieurs chapitres.

Ceci étant dit.

Bonne lecture.

Partie 1 : Introduction aux espaces naturels

I Chapitre I : Conjecture de Symens – Rotule

I . I Opérations fondamentales

I . IA Transformations géométriques

La géométrie est une catégorie des mathématiques qui peut être définie de plusieurs façons différentes.

Dans ce thését, on définit la géométrie comme la science des **transformations** du plan ou de l'espace. Une **transformation** est un procédé qui permet de changer un objet géométrique en un autre.

À titre d'exemple :

- une translation qui transforme une figure en une autre de mêmes dimensions mais située dans une autre zone du plan/de l'espace
- une déformation qui transforme une figure en une autre sans aucune conservation des dimensions, mais qui reste dans la même zone
- une identité qui transforme une figure en elle-même sans changement de zone

Toutes ces transformations, plus ou moins complexes, peuvent être qualifiées d'**opérations** sur le point de vue algébrique. Un objet x auquel on applique une transformation (que l'on note $\rightarrow$) devient un objet x' .

Écris ainsi : $x \rightarrow x'$, la transformation géométrique ressemble à une opération algébrique. C'est ainsi que nous nommerons également **opération** les transformations géométriques.

I . IB Opérations autour d'un point

Nous allons considérer une catégorie d'opérations bien particulières : celles qui agissent sur un point du plan ou de l'espace.

Parmi ces opérations, nous avons :

Fig. Exemple d'opérations agissant sur un point A

Opération	Notation	Description
identité	$Id(A)$	renvoie le point A
symétrie centrale directe	$Sym(A)$	renvoie le symétrique de A par rapport à l'origine
symétrie axiale	$Sax(A, (d))$	renvoie le symétrique de A par rapport à la droite (d)
rotation directe	$Rot(A, \theta)$	renvoie le point obtenu par rotation de A d'un angle direct de θ par rapport à l'origine
rotation indirecte	$Rin(A, B, \theta)$	renvoie le point obtenu par rotation de A d'un angle direct de θ par rapport à B
homothétie directe	$Hmh(A, k)$	renvoie le point obtenu par homothétie de OA de rapport k (O est l'origine)
translation	$Tsl(A, \vec{u})$	renvoie le point obtenu par translation de A selon le vecteur $\vec{u}$.

Vous noterez que les notations utilisées ne sont absolument pas officielles.

Il existe évidemment plein d'autres opérations sur un point, s'ajoutant au tableau ci-dessous.

Néanmoins, on peut distinguer deux catégories :

- les opérations qui **se basent sur l'origine** : la symétrie centrale directe, l'homothétie directe, etc
- les opérations qui **ont besoin d'un ou de plusieurs autres points** : la rotation indirecte, la symétrie axiale, etc

Cette distinction permet de **hiérarchiser** les opérations entre elles : certaines sont plus importantes que d'autres, voire **s'auto-suffisent** à partir de l'origine et d'un point quelconque distinct.

I. IC Les opérations fondamentales

C'est cette hiérarchisation des opérations qui donne naissance à la notion d'**opération fondamentale**.

Définition: Une **opération fondamentale** est une opération, au sens transformation géométrique, **qui peut générer tout un espace à partir d'uniquement deux points initiaux** : l'origine O et un point quelconque A distinct de O .

En théorie, voici ce qu'est une opération fondamentale. En pratique, une opération fondamentale **définit d'autres opérations** pour pouvoir compléter les "trous" restants.

Ce principe peut également être vu différemment : **on peut construire un point de plusieurs manières différentes.**

Par exemple, imaginons B défini comme la symétrie centrale de A par rapport à O (soit $B = Sym(A)$). On peut aussi dire que B est le résultat de la rotation de π radians par rapport à O (soit $B = Rot(A, \pi)$). Ou encore, que B est l'homothétie directe de A de rapport $-OA$ (soit $B = Hmh(A, -OA)$).

On remarque alors que : $Sym(A) = Rot(A, \pi) = Hmh(A, -OA)$.

Donc, un point peut être obtenu par une opération $\rightarrow$. Mais selon la théorie des opérations fondamentales, ce même point est obtenable à partir d'une opération fondamentale.

Ainsi, une opération non fondamentale peut donc **être exprimée comme une combinaison d'opérations fondamentales**.

I. II La conjecture de Symens – Rotule

C'est ainsi qu'entre en jeu la **conjecture de Symens – Rotule**. En réalité, il s'agit de deux conjectures différentes mais qui touchent au même problème des opérations fondamentales.

Comme nous l'avons vu précédemment, les opérations fondamentales permettent la génération de tout l'espace à partir de deux points distincts, mais aussi de définir les autres opérations.

I. IIA La conjecture de Rotule

Introduisons la première conjecture.

=>: Conjecture de Rotule

La conjecture de Rotule stipule que le monde (naturel ou réel ou complexe) peut être obtenu à partir d'un seul point distinct de l'origine et de rotations directes successives.

La conjecture de Rotule insinue donc deux choses :

- que la rotation directe est une opération fondamentale
- que toute opération est exprimable comme une succession de rotations directes

Le mot Rotule évoque Rotation. Aucun lien avec une personne quelconque.

=>: Petite idée de démonstration.

Le monde (vu comme un cube compact de dimensions infinies) peut être représenté par une sphère compacte dont nous étendons progressivement le rayon.

La sphère compacte représente tous les points que nous pouvons intuitivement construire à partir de rotations directes. La modification du rayon est le point à justifier.

Il suffirait donc à montrer que la translation ou l'homothétie (directe ou indirecte) peut être exprimée uniquement à partir de rotations directes.

Définition: On dit qu'un espace E est **rotulois** si sa conception respecte la conjecture de Rotule.

Autrement dit, tous les points d'un espace rotulois sont construisibles à partir de l'origine et d'un autre point distinct et en ayant recours uniquement à des rotations directes.

I. IIB La conjecture de Symens

Passons à la seconde conjecture.

=>: Conjecture de Symens

La conjecture de Symens stipule que le monde (naturel ou réel ou complexe) peut être obtenu à partir d'un seul point distinct de l'origine et de symétries centrales successives.

La conjecture de Symens insinue donc deux choses :

- que la symétrie centrale est une opération fondamentale
- que toute opération est exprimable comme une succession de symétries centrales

Le mot Symens évoque Symétrie (le "ens" pour "centrale"). Aucun lien avec une personne quelconque. La ressemblance avec l'entreprise est purement une coïncidence.

La démonstration peut être faite de manière très simple : vu que $Rot(A, \pi) = Sym(A)$, alors si la rotation directe Rot est une opération fondamentale, alors la symétrie centrale Sym l'est en remplaçant intelligemment les rotations directes par des symétries centrales.

Définition: On dit qu'un espace E est **symensien** si sa conception respecte la conjecture de Symens.

Autrement dit, tous les points d'un espace symensien sont construisibles à partir de l'origine et d'un autre point distinct et en ayant recours uniquement à des symétries centrales.

II Chapitre II : Les espaces naturels

II. I Entrée dans le monde naturel

II. IA Le monde naturel et les espaces naturels

On considère un monde où seuls les nombres entiers relatifs existent. Autrement dit, le nombre après 1 n'est pas 1, 1 ni 1,001 ni 1,000000000001 mais 2. Et ainsi de suite. Pour mieux distinguer ce monde particulier, on qualifiera ce monde de **monde naturel**.

Définition: On appelle **monde naturel** le monde à 3 dimensions où seuls les nombres entiers existent.

Par conséquent, un point dans le monde naturel a nécessairement trois coordonnées toutes entières.

Évidemment, la notion de monde naturel n'existe pas dans la réalité. Il s'agit uniquement d'un outil mathématique.

D'ailleurs, ce concept est déjà utilisé par exemple en cristallographie (réseaux de Bravais avec les plans cristallins).

Dans un monde, on peut définir des **espaces**, espace dans le sens d'ensemble plus ou moins continu de points.

Définition: On appelle **espace naturel** un ensemble de points appartenant au monde naturel.

II. IB Repères dans le monde naturel

Tout comme dans le monde réel (monde que l'on connaît, soit $\mathbb{R}^3$), on peut définir des repères (orthogonaux, orthonormaux ou quelconques) avec une origine.

Cela dit, afin de repérer si on travaille dans le monde naturel ou dans le monde réel, les **noms des axes** d'un repère dans le monde naturel **diffèrent** de ceux dans le monde réel.

Fig. Tableau de correspondance du nom des axes

Lettre	Nom (monde réel)	Nom (monde naturel)
x	abscisse	abscendant
y	ordonnée	ordant
z	cote	cotinette

II. IC Les espaces naturels purs

Dans le monde naturel, les points ont des coordonnées toutes entières.

Un espace naturel peut être entièrement cloisonné dans une portion du monde naturel où tous les points ont des coordonnées entières mais toutes positives.

Définition: On appelle **espace naturel pur** un ensemble dont tous les points ont des coordonnées toutes positives ou nulles (et entières).

Algébriquement, on dit qu'un ensemble E est un espace naturel pur, s'il respecte la condition suivante :

$$\forall (x, y, z) \in E, \begin{cases} x \in \mathbb{N} \\ y \in \mathbb{N} \\ z \in \mathbb{N} \end{cases}$$

II. II Notions avancées sur les espaces naturels

II. IIA Calculs de distance

Dans le monde naturel, les nombres à virgule n'existent pas, ce qui rend la définition de distance au sens euclidienne impossible.

Puisque les espaces naturels peuvent être très désordonnés, la notion de distance reste propre à chaque application. Ainsi, la distance utilisée pour l'espace naturel des cristallographes n'aura pas la même définition que celle utilisée dans la théorie des graphes. Cela dit, il y a de fortes chances que la définition retenue soit celle de la **distance hamiltonienne**.

Définition: La **distance hamiltonienne** se définit dans un espace à trois dimensions comme :

$$d(A, B) = |x_A - x_B| + |y_A - y_B| + |z_A - z_B|$$

La distance hamiltonienne garantit une distance **entière** et **compatible** avec le monde naturel.

II.IIB Continuité

Dans le monde naturel, la notion de **continuité** est tout autre. Comme ce monde est constitué uniquement des entiers, la notion de continuité n'est autre qu'une notion de **succession ordonnée**.

Par exemple, l'espace naturel $E = \{(0, 1, 0); (0, 0, 0)\}$ est continu car le point $(0, 1, 0)$ a un ordant qui succède celle du point $(0, 0, 0)$ (1 succède à 0). De même, l'espace naturel $E = \{(n, 0, 0), n \in \mathbb{R}\}$ est continu.

II.IIC Opérations

Le monde naturel ne diffère pas trop par rapport au monde réel du point de vue des opérations.

Toutes les opérations géométriques définies dans le monde réel sont applicables au monde naturel, avec adaptation des paramètres.

Par exemple, la translation $T_{sl}(A, \vec{u})$ existe bel et bien dans le monde naturel, mais son domaine de définition **est réduit** à des coordonnées **entières** du vecteur $\vec{u}$.

Du point de vue arithmétique, **l'addition, la multiplication et la soustraction sont correctement définies** dans le monde naturel.

En revanche, la division n'existe pas dans le monde naturel, sauf définition explicite dans un contexte particulier pour un certain espace naturel. La multiplication est donc une opération **NON inversible**.

II.IID Transmutations

Dans certains cas, il peut être intéressant de se ramener à un équivalent dans le monde réel (pour une démonstration plus facile par exemple). En effet, dans le monde réel, on peut utiliser des théorèmes déjà démontrés, ou tout simplement le pouvoir des nombres à virgule.

Il est possible de faire ce changement :

Définition: On appelle **transmutation** le fait de transférer un espace naturel **VERS** son équivalent dans le monde réel.

La transmutation consiste donc à attribuer un ensemble de points dans le monde réel comme **représentant** d'un espace naturel.

Par conséquent, la transmutation respecte les propriétés suivantes :

- l'**exactitude** de l'espace : les points de l'espace transmuté ont exactement les mêmes coordonnées que ceux de l'espace naturel
- l'**unicité des points** de l'espace : à un seul point de l'espace transmuté correspond à un point unique de l'espace naturel
- la **conservation** de l'espace : aucun point n'est rajouté ni supprimé
- l'**explosion** de l'espace : avec l'apparition des nombres à virgule, un espace transmuté devient automatiquement un ensemble discret de points dans le monde réel

Remarque : la transmutation est une application bijective ! Néanmoins, je n'ai pas attribué de nom à la réciproque de la transmutation.